

**А.И. Малышев, И.Н. Тихонов,
К.Ц.Дугарцыренов**

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ
ФОРШОК—АФТЕРШОКОВЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИЛЬНЫХ
КУРИЛЬСКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ**

ПРЕПРИНТ

Южно-Сахалинск 1992

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МОРСКОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ПРЕПРИНТ

А. И. Мальшев, И. Н. Тихонов, К. Ц. Дугарцыренов

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ
ФОРШОК - АФТЕРШОКОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИЛЬНЫХ КУРИЛЬСКИХ
ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Южно-Сахалинск
1992

УДК 550.341

Изложена методика математического моделирования форшок - афтершоковых процессов сильных землетрясений. Она включает в себя три этапа выявления вида дифференциального уравнения, описывающего развитие этих процессов. На примере форшок-афтершоковых последовательностей сильных курильских землетрясений показано, что таковыи уравнением является нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, названное уравнением саморазвивающихся процессов.

Издано по решению Ученого Совета Института морской геологии и геофизики ДВО РАН

Ответственный редактор
канд. физ. - мат. наук

А. И. Иващенко

Введение

Попытки выявления эмпирических закономерностей развития форшоков-афтершоковых последовательностей сильных землетрясений в разные годы предпринимались многими исследователями (см., например, [1-8]). Наиболее часто в литературе упоминается закономерность, установленная Омори [1] при анализе ряда афтершоковых последовательностей Японии:

$$N = A / (1+k t),$$

где N - число афтершоков в течение интервала времени, середина которого соответствует моменту t после возникновения основного толчка, а A и k - экспериментальные константы. В 1957г. эта формула была модифицирована Уцу [2] с целью распространения гиперболической зависимости Омори на все афтершоковые последовательности. Х.К.Гупта и Б.К.Растоги [4], изучая форшоковые последовательности землетрясений, связанные с водохранилищами, установили аналогичный факт гиперболического нарастания количества форшоков.

Вышеперечисленные эмпирические зависимости можно рассматривать как частные случаи решения дифференциального уравнения, предложенного Войтом [5-7] для описания процессов разрушения различных материалов в условиях примерного постоянства давления и температуры :

$$\dot{\Omega} - \alpha \Omega - A = 0$$

где A и α - эмпирические константы, а Ω - измеряемая величина, такая как напряжение. Войт рассматривает это уравнение в качестве фундаментального физического закона и считает возможным его применение для предсказания времени извержения вулканов и катастрофических землетрясений. При этом в качестве параметра Ω на практике может использоваться произвольная измеряемая величина, отражающая развитие процесса.

На первом этапе исследования (1986 - 1988 гг.) одним из авторов данной работы [9,10] был проведен анализ большого количества эмпирических закономерностей развития физических, геофизических и астрофизических процессов. В результате сопоставления и обобщения этих закономерностей для описания динамики саморазвивающихся природных процессов было предложено уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \left[\left(\frac{dx}{dt} \right) - \sqrt{v_0} \right]^r$$

Здесь x – параметр, характеризующий развитие рассматриваемого процесса во времени, а коэффициент k , показатель степени γ и скорость развития процесса в стационарном состоянии v_0 – эмпирические константы. Нетрудно видеть, что частный случай этого уравнения при $k = A$, $\gamma = \alpha / 2$, $v_0 = 0$ и $x = \Omega$ соответствует уравнению Вайта, которое может быть распространено на процессы саморазвития систем в окрестностях состояния равновесия $v_0 = 0$.

В ходе второго этапа исследований (1989–1990 гг.) авторами был проведен анализ приемлемости уравнения саморазвивающихся процессов /СРП/ к описанию развития форшок – афтершоковых последовательностей сильных землетрясений [11]. С этой целью были рассмотрены две выборки исходных данных. Одна из них отвечала событиям из эпицентральной области афтершоков Шикотанского землетрясения 17.06.1973г. (магнитуда $M=8.0$). Вторая соответствовала афтершокам Итурупского землетрясения 24.03.1978г. ($M=8.0$). В качестве параметра x рассматривалось суммарное количество землетрясений энергетического класса $K \geq 9$ [12], что соответствует представительному уровню регистрации таких землетрясений в данном районе.

Основные выводы работы [11] в общих чертах сводились к следующему:

- форшок-афтершоковые последовательности хорошо соответствуют решениям уравнения СРП;
- предлагаемый подход к изучению развития таких последовательностей является перспективным в плане прогноза сильных землетрясений, так как имеет место совпадение времени возникновения этих землетрясений с вертикальной асимптотой зависимости количества форшоковых толчков от времени.

Однако, на этом этапе исследований вид уравнения СРП фактически постулировался. Поэтому в настоящей работе ставится задача разработки методики выявления вида дифференциального уравнения, описывающего динамику форшок-афтершоковых последовательностей, и оценки его параметров.

1. ОБЩИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ ФОРШОК-АФТЕРШОКОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть имеется временной ряд землетрясений, эпицентры которых локализованы в пределах выбранной площадки. Решение задачи выявления закономерностей этого временного ряда можно разделить на три этапа.

1 этап. Обзор временного ряда данной площадки эпицентральной зоны с целью разбиения его на участки, на протяжении которых прослеживаются устойчивые закономерности развития сейсмической активности.

2 этап. Сопоставление в пределах выявленных участков временного ряда первой и второй производных количества землетрясений N от времени. Контроль наличия зависимости

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = f \left(\frac{dN}{dt} \right),$$

определение вида соответствующего дифференциального уравнения и его параметров.

3 этап. Определение начальных условий, при которых частное решение полученного на втором этапе дифференциального уравнения наилучшим образом соответствует рассматриваемому участку временного ряда землетрясений.

Кроме вышеизложенного, для построения математической модели развития форшок-афтершоковых последовательностей предварительно необходимо разрешить две проблемы: проблему двукратного дифференцирования временного ряда и проблему многомерной оптимизации. Поскольку при решении проблемы двукратного дифференцирования временного ряда используется многомерная оптимизация, то именно с последней было бы логично продолжить изложение методики решения задачи.

1.1. Многомерная оптимизация методом рекуррентных сечений

Многомерные задачи оптимизации являются более сложными и трудоемкими, чем одномерные, причем трудности при их решении (равно как и затраты машинного времени) возрастают при увеличении размерности. В качестве примера наиболее простых методов многомерной оптимизации можно привести методы покоординатного спуска, градиентного спуска, наискорейшего спуска [13].

Все перечисленные методы хорошо работают лишь в том

случае, если поверхности одинаковых среднеквадратических отклонений $\alpha(a_1, \dots, a_n) = \text{const}$ в пространстве n временных аппроксимаций A_n

близки к изометричным. Нарушение изометричности этих поверхностей соответствует наличию корреляции между двумя или более переменными аппроксимации. Чем сильнее корреляция, тем более ярко выражена в совокупности поверхностей $\alpha(a_1, \dots, a_n) = \text{const}$ так называемая

«овраговая» структура (см. рис. 1.1), делающая применение вышперечисленных методов либо крайне затруднительным, либо просто невозможным.

Именно с этим случаем жесткой, почти функциональной, корреляции пришлось столкнуться при разработке алгоритма решения задачи. Поэтому попытки применения вышперечисленных методов и их модификаций успеха не имели. В каждом случае спуск в область минимума функции $\alpha(a_1, \dots, a_n)$ заканчивался застреванием в «овраге». В литературе [13] для случая «овраговых» структур рекомендуется метод движения в направлении минимума вдоль дна «оврага». В свою очередь, дно определяется из двух близких точек методом градиентного спуска.

Для решения нашей задачи этот метод также неприемлем. Во-первых, использование метода градиентного спуска предполагает возможность задания аппроксимационной функции в явном виде. У нас же имеется только дифференциальное уравнение. Во-вторых, «такой метод достаточно эффективен для функции двух переменных, однако при большем числе переменных могут возникнуть трудности» ([13], с. 152). В нашем случае, при аппроксимации дифференциальными уравнениями, наряду с их параметрами, такими как k , γ , и v_0 в случае уравнения СРП, дополнительными неизвестными являются еще и начальные условия, определяющие частное решение данного дифференциального уравнения при фиксированных значениях его параметров. Для дифференциального уравнения второго порядка это увеличивает количество переменных аппроксимации на два.

Все вышесказанное сделало необходимым поиск иного метода многомерной оптимизации. В конечном счете выбор был сделан в пользу метода рекуррентных сечений. Его суть в общих чертах можно охарактеризовать следующим образом. Пусть мы имеем пространство n переменных аппроксимации $A_n(a_1, \dots, a_n)$. Фиксированием некоторой переменной (пусть ради определенности это будет a_1) получаем совокупность сечений пространства A_n подпространствами $A_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$, размерность которых на единицу меньше. Для трехмерного пространства это будет сечение плоскостями, а для плоскости -

линиями. Таким образом, задача n -мерной оптимизации сводится к нахождению минимумов в пространствах с размерностью $n-1$ и сопоставлению их между собой. При этом поиск оптимального значения a_1 аналогичен случаю одномерной оптимизации.

В свою очередь в пространстве $A_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$, зафиксировав одну из переменных, мы получаем сечение этого пространства подпространствами размерностью $n-2$ и так далее. В конечном счете после повтора этой операции n раз мы приходим к тривиальному случаю одномерной оптимизации. Проиллюстрируем применение метода рекуррентных сечений на примере случая двух переменных оптимизации (рис. 1.1).

Для исследования поведения функции $\alpha(x, y)$ на плоскости переменных аппроксимации x и y зафиксируем произвольное значение переменной $y=y_0$. Тем самым мы получаем сечение плоскости прямой линией. Поиск минимального среднеквадратического отклонения вдоль этой прямой особых трудностей не представляет. Фиксированием значения переменной $x=x_0$ мы получаем сечение этой линии точкой (x_0, y_0) , в которой и определяем значение $\alpha(x_0, y_0)$. Далее, делаем шаг вдоль этой линии в направлении уменьшения переменной x и определяем значение среднеквадратичного отклонения σ в точке $\alpha(x_0 - \Delta x, y_0)$. Если $\alpha(x_0 - \Delta x, y_0) < \alpha(x_0, y_0)$, то точку $(x_0 - \Delta x, y_0)$ принимаем за исходную и в прежнем направлении делаем новый шаг. Если же $\alpha(x_0 - \Delta x, y_0) \geq \alpha(x_0, y_0)$, то делаем шаг в противоположном направлении вдоль прямой, то есть определяем значение $\alpha(x_0 + \Delta x, y_0)$. Если оно меньше исходного - смещаемся, если нет - делаем вывод, что для данного шага смещения значение $\alpha(x_0, y_0)$ в исходной точке минимально.

Уменьшаем шаг Δx на порядок и повторяем процедуру поиска минимального значения функции $\alpha(x, y)$ на рассматриваемой прямой. Последовательное уменьшение шага смещений и поиск минимального среднеквадратического отклонения вдоль прямой осуществляем до тех пор, пока величина Δx не становится достаточно малой, чтобы позволить утверждать, что на рассматриваемой прямой мы нашли минимальное значение. Аналогичным образом, изменяя переменную y , а следовательно переходя с прямой на прямую, находим и сравнивая минимальные значения функции $\alpha(x, y)$ вдоль этих прямых, и при необходимости уменьшая шаг сечений этими прямыми линиями, можно получить минимум среднеквадратического отклонения на плоскости и соответствующие ему оптимальные значения переменных аппроксимации

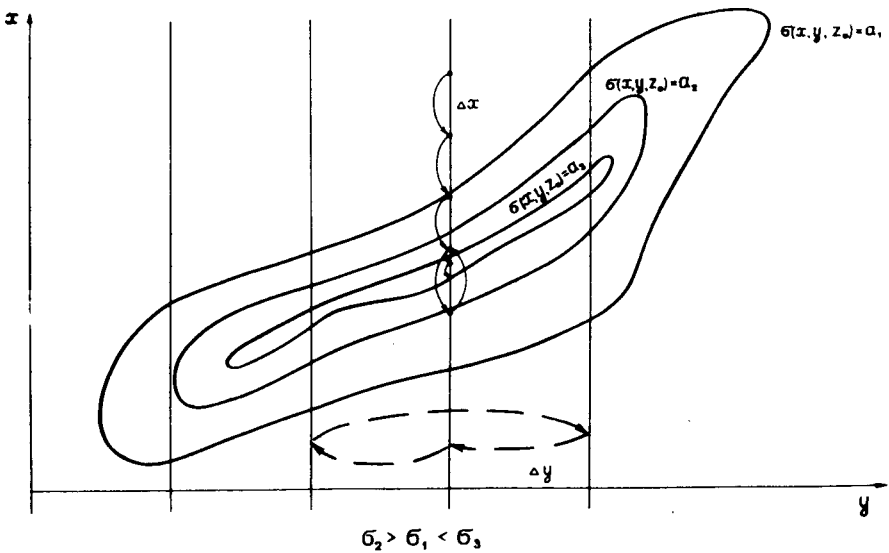


Рис. 1.1. Оптимизация методом рекуррентных сечений для случая двух переменных.

х и у.

Для большего числа переменных процедура аналогична. Как показывает практика, этот, казалось бы, громоздкий метод, на практике достаточно эффективен. В программном обеспечении ЭВМ процедура n -мерной оптимизации описанным выше методом может быть реализована в виде компактной структуры n вложенных друг в друга однотипных подпрограмм. При использовании описанного метода могут возникнуть затруднения лишь в случае наличия у функции $\alpha(a_1, \dots, a_n)$ нескольких минимумов. Контроль единственности минимума осуществляется путем запуска процедуры оптимизации с разных исходных точек. Однако при использовании метода рекуррентных сечений в рамках решения задачи по разработке математических моделей развития форшок-афтершоковых последовательностей с фактом множественности минимумов $\alpha(a_1, \dots, a_n)$ сталкиваться не приходилось.

1.2. Первый этап построения математической модели

Первый этап решения задачи реализуется в первой части программы CHAST. Его основу составляет операция сглаживания с одновременным двукратным дифференцированием временного ряда. Для решения стоящей перед этапом задачи - выявления участков временного ряда с устойчивой закономерностью - наиболее удобными представляются зависимости логарифма частоты от порядкового номера землетрясений, а также времен (фактического и сглаженного) землетрясений от их порядкового номера (количества): $T_\phi(N)$ и $T_0(N)$ соответственно. Выполнение на этом этапе двукратного дифференцирования создает предпосылки для перехода к следующему этапу.

Наибольшие сложности на этом этапе решения задачи были связаны с выбором оптимальной операции сглаживания. Были сделаны попытки использовать различные модификации линейного сглаживания, сглаживаний с использованием полиномов второй и четвертой степени, формул Спенсера. Линейное сглаживание оказалось неприемлемым из-за искажения реальных закономерностей форшок-афтершоковых последовательностей. Искажение возникает в участках максимальной кривизны графиков зависимостей параметра N от времени T_ϕ за счет замены участков кривой отрезками прямых линий.

Использование сглаживаний на основе полиномов второй и четвертой степени, формул Спенсера, различных фильтров оказалось невозможным из-за явления Гиббса, которое возникает в окрестностях резкого излома сглаживаемой зависимости и характеризуется

искусственным приведением в эту зависимость колебаний, затухающих по мере удаления от точки излома. При сглаживании временного ряда эти колебания приводят к появлению отрицательного времени, что в рамках решения поставленной задачи лишено всякого смысла. Попытки подравнять эти колебания успеха не имели.

В конечном счете был сделан выбор в пользу сглаживания, в ходе которого выбирается наилучший способ аппроксимации участка временного ряда $t_{i-j} \dots t_i \dots t_{i+j}$ с центром в точке t_i из

экспоненциальной $z_t(t-t_0) = e^{aN+b}$,

логарифмической $t = a \ln [z_n(N-N_0)] + b$,

гиперболической $z_t(t-t_0) = e^b [z_n(N-N_0)]^a$ и

линейной $t = aN + b$ аппроксимаций. Здесь N - порядковый номер землетрясений в последовательности, а параметры z_t , z_n принимают значения $+1$ или -1 , в зависимости от знака разностей $t-t_0$ и $N-N_0$, соответственно. Всего, с учетом различных возможных сочетаний значений параметров z_t и z_n , анализируется 9 способов аппроксимации рассматриваемого участка временного ряда, из которых выбирается наилучший.

Оптимизация в случае линейной аппроксимации легко осуществима аналитически. При заданных значениях параметров t_0 и N_0 к аналогичному случаю могут быть сведены и остальные способы аппроксимации при замене переменных t на $\ln [z_t(t-t_0)]$, а N на $\ln [z_n(N-N_0)]$: $\ln [z_t(t-t_0)] = aN + b$ для экспоненциальной аппроксимации и $\ln [z_t(t-t_0)] = a \ln [z_n(N-N_0)] + b$ для гиперболической аппроксимации. Таким образом, задача оптимизации сводится к поиску соответствующих значений t_0 и N_0 , который и осуществляется по методу рекуррентных сечений.

Если наилучший способ аппроксимации найден и определены соответствующие ему оптимальные значения a , b , t_0 , и N_0 , то определение первой и второй производной временного ряда в центре (точке i) рассматриваемого интервала затруднений не вызывает. В качестве этих производных могут быть использованы соответствующие производные аппроксимационной функции. А именно, расчетное (сглаженное) время i -того события определяется по формулам

$t_i = t_0 + z_t e^{aN_i + b}$ - для экспоненциальной аппроксимации,

$t_i = a \ln[z_n(N_i - N_0)] + b$ - для логарифмической аппроксимации,

$t_i = t_0 + z_t [z_n(N_i - N_0)]^a e^b$ - для гиперболической аппроксимации

и $t_i = a N_i + b$ - для линейной аппроксимации.

Аппроксимационные формулы для первой и второй производных параметра N по времени в этот момент времени дают следующие соотношения:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{a(t-t_0)} \quad \text{и} \quad \frac{d^2N}{dt^2} = \frac{-1}{(t-t_0)^2}$$

для экспоненциальной аппроксимации,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{z_n}{a} e^{\frac{t-b}{a}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2N}{dt^2} = \frac{z_n}{a} e^{\frac{t-b}{a}}$$

для логарифмической аппроксимации,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{z_n z_t}{a} e^{\frac{-b}{a}} \left[z_t (t-t_0) \right]^{\frac{1-a}{a}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2N}{dt^2} = \frac{z_n (1-a)}{a^2} e^{\frac{-b}{a}} \left[z_t (t-t_0) \right]^{\frac{1-2a}{a}}$$

для гиперболической аппроксимации,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad \frac{d^2N}{dt^2} = 0$$

для линейной аппроксимации.

Следует заметить, что, вообще говоря, выражение для гиперболической аппроксимации охватывает также случаи степенной и обратной гиперболической аппроксимации в зависимости от значений параметров z_n и z_t .

Рассмотрим в качестве примера афтершоковую последовательность роя землетрясений 23 января 1980 г. (площадка в районе г. Петропавловска-Камчатского с координатами $\varphi = 52,0 - 54,0$ град. с.ш., $\lambda = 158,5 - 161,5$ град. в.д.). Для обзора временного ряда землетрясений были проведены сглаживания с шагом по 10, 20, 50 событиям. Обзорные графики зависимостей $\ln(-\frac{dN}{dt})$ от N и от $t_{\text{фак}}$ и $t_{\text{сгл}}$ приведены на рис.1.2. и рис.1.3а-в. В обрабатываемый файл данных были включены 335 землетрясений, начиная с первого землетрясения роя в 01 час 51 мин 42 сек и кончая землетрясением

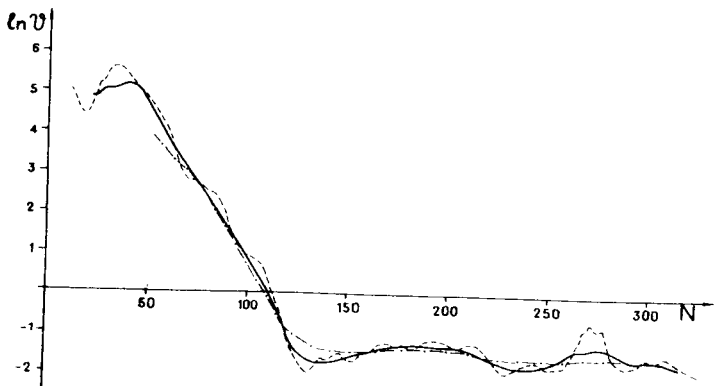


Рис.1.2. Зависимость логарифма частоты землетрясений $\ln N$ от порядковых номеров N в афтершоковой последовательности землетрясений 23 января 1980 г.

Параметр сглаживания равен: 10 событиям - пунктирная кривая;
 20 событиям - сплошная линия;
 50 событиям - штрих-пунктирная кривая

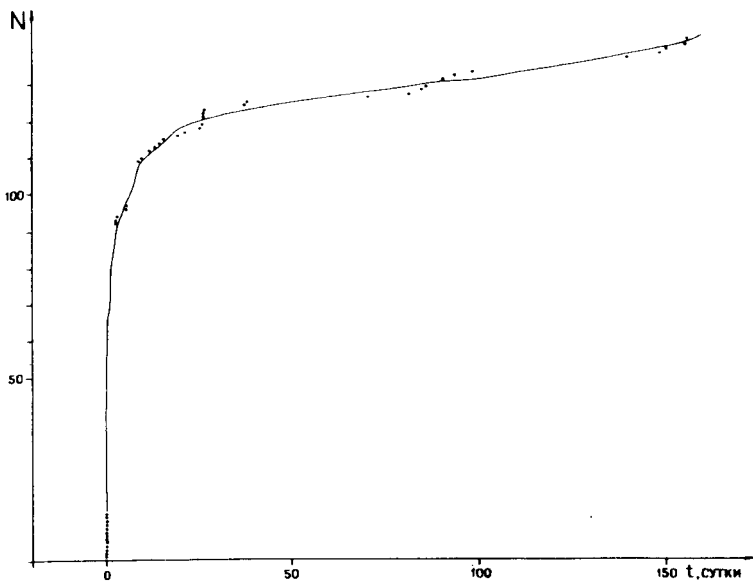


Рис. 1.3а. Сглаживание афтершоковой последовательности землетрясений 23 января 1980 г. с параметром $J = 10$ событиям.

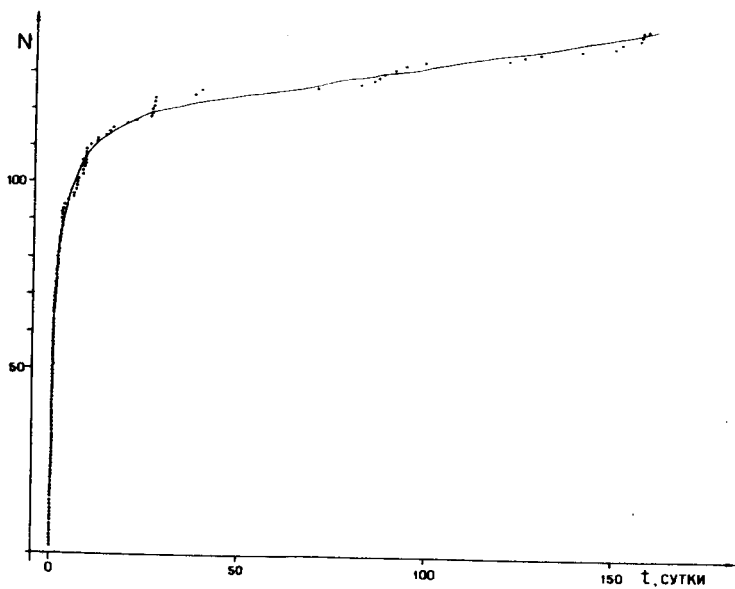


Рис. 1.36. Сглаживание афтершоковой последовательности землетрясений 23 января 1980 г. с параметром $J' = 20$ событиям.

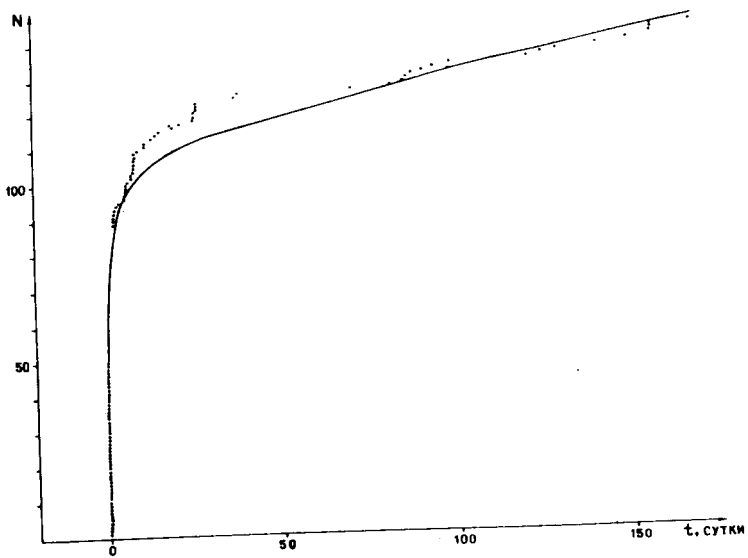


Рис. 1.3в Сглаживание афтершоковой последовательности землетрясений 23 января 1980 г. с параметром $J = 50$ событиям.

18 декабря 1982 г. в 18 час 50 мин 44 сек.

Приступим к решению задачи первого этапа - выявлению участков временного ряда с устойчивой закономерностью. Из графика зависимости логарифма частоты землетрясений от их порядкового номера (рис.1.2) при шаге сглаживания по 10 событиям следует, что частота землетрясений имеет максимум в районе 31 события. Если учесть шаг сглаживания, то можно сделать вывод, что процесс уменьшения частоты начинается с 21 землетрясения, 0 том же самом свидетельствует график зависимости $\ln\left(\frac{dN}{dt}\right)$ от N при шаге сглаживания 20. Этот график имеет максимум в районе 40-го землетрясения, а следовательно в рассмотрение процесса затухания сейсмической активности можно включить землетрясения, начиная с 20-го (с учетом шага сглаживания).

Таким образом, первые 20 землетрясений роя при выявлении закономерности затухания сейсмической активности из рассмотрения необходимо исключить. Возможно, что несоответствие этих землетрясений процессу затухания связано с наличием объективных закономерностей в начале роя. Но нельзя исключить и того, что часть землетрясений в начале роя из-за их высокой частоты не была обработана. С другой стороны, прекращение затухания сейсмической активности происходит в районе 130 - 150 землетрясения, после чего имеет место слабый колебательный процесс с большим периодом по N . Последний процесс мы пока рассматривать не будем и ограничимся попыткой выявления закономерности собственно афтершоковой последовательности.

Перейдем к рассмотрению второй задачи этапа - подготовке данных для перехода ко второму этапу. Для этого необходимо найти оптимальный шаг сглаживания, позволяющий исключить с одной стороны влияние локальных отклонений от общей закономерности, а с другой - возможность существенных искажений сглаживаемого временного ряда за счет избыточного шага сглаживания. Выбор этого шага осуществляется в ходе анализа графиков зависимости N от $t_{\text{фак}}$ и $t_{\text{сгл}}$, а так же при анализе изменений знака второй производной $\frac{d^2N}{dt^2}$.

Так как мы рассматриваем процесс затухания сейсмической активности, то вторая производная должна быть на всем рассматриваемом интервале строго отрицательной. Любые изменения знака свидетельствуют о влиянии локальных отклонений, а следовательно о недостаточной сглаженности временного ряда.

Анализ графиков на рис.1.3а-в показывает, что сглаживание с шагом по 10 событиям является недостаточным, так как на сглаженной зависимости имеются локальные отклонения. Об этом же свидетельствует неоднократное изменение знака второй производной.

В свою очередь шаг сглаживания по 50 событиям оказывается избыточным из-за искажения участка перехода от процесса затухания к процессу стационарного развития. Оптимальным оказывается шаг сглаживания по 20 событиям. При этом изменения знака второй производной происходит лишь на 131-ом событии. Последнее и определяет границу, вплоть до которой сохраняется устойчивая закономерность затухания с последующим переходом к стационарному развитию процесса. От точки максимальной частоты на 41-ом событии до этой границы мы имеем 90 точек, в которых можно поставить в соответствие друг другу первую и вторую производные параметра N по времени t и перейти ко второму этапу решения задачи.

1.3. Второй этап построения математической модели

Этот этап решения задачи позволяет установить фактическое взаимоотношение между первой и второй производными изменения параметра N во времени t , получить соответствующее этому взаимоотношению дифференциальное уравнение, а, следовательно, и объективно существующий закон развития сейсмической активности. Таким образом мы можем избавиться от элемента гипотетичности, так или иначе заложенного в любые попытки использования какого бы то ни было априорного дифференциального уравнения, будь то уравнение Войта [5] или уравнение СРП.

Проиллюстрируем второй этап построения математической модели на примере ранее рассмотренной афтершоковой последовательности землетрясения 23 января 1980 г. На предыдущем этапе исследования мы получили возможность сопоставления первой и второй производной параметра N во времени t в 90 точках. Из полученного графика (рис.1.4) со всей очевидностью следует вывод о наличии в

рассматриваемой зависимости $\ln \left| \frac{d^2 N}{dt^2} \right|$ от $\ln \left(\frac{dN}{dt} \right)$ двух асимптот: наклонной и вертикальной.

Из наличия в правой части графика наклонной асимптоты следует, что для достаточно больших значений $\ln \left| \frac{d^2 N}{dt^2} \right|$ и $\ln \left(\frac{dN}{dt} \right)$ выполняется зависимость

$$\ln \left| \frac{d^2 N}{dt^2} \right| = \alpha \ln \left(\frac{dN}{dt} \right) + \beta \quad (1.1)$$

где α - тангенс угла наклона асимптоты, а β - ее сдвиг

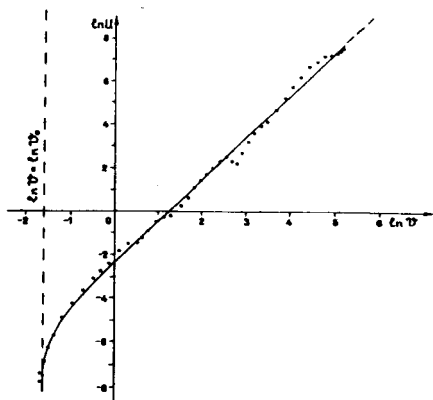


Рис. 1.4. Взаимосвязь первой v и второй u производных изменения количества землетрясений N с течением времени в афтершоковой последовательности землетрясений 23 января 1980 г.

относительно центра координат вдоль оси ординат, то есть

$$\ln \left[\frac{d^2 N}{dt^2} \right] \text{ при } \ln \left[\frac{dN}{dt} \right] = 0.$$

Экспонируя соотношение 1.1, получаем $\left[\frac{d^2 N}{dt^2} \right] = A \left[\frac{dN}{dt} \right]^\alpha$, где

$A = e^\beta$. Учитывая, что частота землетрясений всегда положительна

$\frac{dN}{dt} > 0$, а вторая производная для рассматриваемого процесса

снижения активности всегда отрицательна, предыдущее выражение

можно записать в виде: $\frac{d^2 N}{dt^2} = -A \left[\frac{dN}{dt} \right]$.

С другой стороны, наличие вертикальной асимптоты в левой части графика свидетельствует о том, что по мере уменьшения значений $\ln(N)$ и их приближения к некоторому значению $\ln(N)_0$ логарифм второй производной стремится в минус бесконечность.

Отсюда следует, что при уменьшении значения N и его приближения к $v_0 = (N)_0$ вторая производная от N стремится к нулю. В качестве простейшего дифференциального уравнения, для которого характерны выше названные асимптоты, можно привести уравнение

$$N = -A [(N) - v_0]^\alpha.$$

Однако, эти асимптоты характерны и для дифференциального уравнения СПР при $\gamma = \alpha/2$ и $k = -A$, а также, в общем случае, для уравнения вида:

$$N = -A [(N)^\lambda - v_0^\lambda]^\alpha, \quad (1.2)$$

где $\lambda > 0$. Более того, именно показатель степени λ определяет кривизну сопряжения рассмотренных выше асимптот между собой. Для удобства сопоставления с уравнением СПР уравнение 1.2 можно переписать в виде

$$N = -A [(N)^\lambda - v_0^\lambda]^{2\gamma/\lambda}. \quad (1.3)$$

Определение оптимальных параметров последнего уравнения для рассматриваемой зависимости $\ln(N)$ от $\ln(N)$ проведено с использованием метода рекуррентных сечений по параметрам γ , k и v_0 для каждого из значений λ от 1,0 до 4,0 с шагом 0,25. Результаты оптимизации приведены в табл.1.1. Как можно видеть,

наилучшая аппроксимация зависимости $\ln \dot{CND}$ от $\ln CND$ достигается при значении $\lambda = 3,0 \pm 0,25$.

Таким образом, без каких бы то ни было сторонних предположений мы получили закон затухания сейсмической активности в рассматриваемой афтершоковой последовательности. Остается лишь на основании проведения подобной операции для большого количества форшоковых и афтершоковых последовательностей оценить степень общности данной закономерности, устойчивость или изменчивость параметров λ , γ , k и v_0 , чтобы получить общий закон развития сейсмичности в форшок-афтершоковых последовательностях сильных землетрясений по данному параметру N .

Результаты оптимизации параметров дифференциального уравнения (1.3) применительно к афтершоковой последовательности землетрясений 23 января 1980 г.

Таблица 1.1.

λ	$\ln k $	γ	v_0	$\sigma_{\text{лин}} / \sigma^*$
1,00	-2,31	0,958	0,105	1,438445
1,25	-2,36	0,964	0,134	1,503240
1,5	-2,40	0,969	0,154	1,561592
1,75	-2,42	0,972	0,169	1,585133
2,0	-2,43	0,978	0,180	1,606962
2,25	-2,44	0,975	0,188	1,620166
2,5	-2,45	0,976	0,194	1,627673
2,75	-2,46	0,977	0,198	1,631060
3,0	-2,46	0,978	0,202	1,631971
3,25	-2,47	0,979	0,204	1,631410
3,5	-2,47	0,979	0,207	1,629827
3,75	-2,47	0,979	0,209	1,627606
4,0	-2,48	0,981	0,210	1,625092

* Соотношение $\sigma_{\text{лин}} / \sigma$ показывает во сколько раз среднее квадратическое отклонение σ данной оптимизации лучше по сравнению со средним квадратическим отклонением линейной аппроксимации.

1.4. Третий этап построения математической модели

Особой сложности этот этап не представляет, так как стоящую перед ним задачу — определение начальных условий, при которых частное решение полученного на втором этапе уравнения наилучшим образом соответствует рассматриваемому участку временного ряда землетрясений, — легко решить при помощи уже отработанного метода рекуррентных сечений. Трудности могут возникнуть лишь при разработке алгоритма интегрирования дифференциального уравнения. Эти трудности связаны с возможной непредставимостью решений дифференциального уравнения в аналитическом виде, а следовательно с большим объемом вычислений.

Рассмотрим в качестве примера процесс интегрирования уравнения СРП :

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = k \left| \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - v_0^2 \right|^\gamma \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = k \left| v^2 - v_0^2 \right|^\gamma.$$

где $v = \frac{dx}{dt}$.

Прямое интегрирование этого уравнения в общем случае является нетривиальной задачей, так как даже зависимость $v(t)$ в общем случае в явном виде не представима, тем более это имеет место при получении зависимости $t(x)$, т.е. расчетного времени событий. Однако возможно применение искусственных приемов, позволяющих упростить процесс интегрирования этого уравнения и соответственно сократить объем вычислений. По определению производной $v = \frac{dx}{dt}$:

$$dx = v dt, \tag{1.4}$$

а из уравнения СРП следует, что

$$dt = \frac{dv}{k(v^2 - v_0^2)^\gamma} \tag{1.5}$$

Подставляя выражение 1.5 в 1.4, получаем

$$dx = \frac{v dv}{k(v^2 - v_0^2)^\gamma} \tag{1.6}$$

Последнее уравнение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, позволяющее получить аналитическое выражение для зависимости $v(x)$ и тем самым существенно упростить процесс интегрирования уравнения СРП. При решении уравнения 1.6 возможны два случая. При $\gamma = 1$ выражение для зависимости $v(x)$ имеет вид :

$$v = \sqrt{v_0^2 + \text{EXP} [2k(x-x_0)]}, \tag{1.7}$$

где $x_0 = x_1 - \frac{1}{2k} \ln(v_1^2 - v_0^2)$ при начальных условиях $v_1 = v(t_1)$ и $x_1 = x(t_1)$. Второй случай решения при $\gamma \neq 1$ приводит к зависимости:

$$v = \sqrt{v_0^2 + [2k(1-\gamma)(x-x_0)]^{\frac{1}{1-\gamma}}}, \quad (1.8)$$

где $x = x_1 - \frac{(v_1^2 - v_0^2)^{1-\gamma}}{2k(1-\gamma)}$, при начальных условиях $v_1 = v(t_1)$ и

$$x_1 = x(t_1)$$

Полученные зависимости $v(x)$ позволяют поставить каждому событию расчетную частоту возникновения этих событий. В свою очередь для получения зависимости $t(x)$, т.е. расчетного времени событий, в случае $\gamma = 1$ прямое интегрирование уравнения СРП приводит к соотношению

$$t = t_0 + \frac{1}{2kv_0} \ln \left(\frac{v - v_0}{v + v_0} \right), \quad (1.9)$$

где $t_0 = t_1 - \frac{1}{2kv_0} \ln \left(\frac{v_1 - v_0}{v_1 + v_0} \right)$.

Соотношение 1.9 представляет собой зависимость $t(v)$. Подставляя в нее значения зависимости 1.7, мы тем самым совершаем операцию $t(v) = t(v(x)) = t(x)$ и получаем искомую зависимость $t(x)$.

Более сложным оказывается получение зависимости $t(x)$ в случае $\gamma \neq 1$. Используя соотношение 1.8, мы можем каждому землетрясению поставить в соответствие расчетную частоту $v(x)$, а расчетное время каждого последующего землетрясения t_i получить из предыдущего t_{i-1} , прибавляя к последнему интегральную сумму:

$$t_i = t_{i-1} + \sum_{j=1}^n \frac{v_i - v_{i-1}}{n} \frac{1}{k \left[\frac{v_{j+1}^2 + v_j^2}{2} - v_0^2 \right]^\gamma}. \quad (1.10)$$

Последнее выражение получается непосредственно при интегрировании уравнения СРП методом интегральных сумм:

$$t_i = t_{i-1} + \int_{v_{i-1}}^{v_i} \frac{dv}{k [v^2 - v_0^2]^\gamma}$$

Тем самым мы опять получаем искомую зависимость $t(x)$.

В принципе можно было бы и ограничиться рассмотренными двумя случаями вычисления расчетного массива времен землетрясений (при $\gamma=1$ и $\gamma \neq 1$), но в случае $v_0=0$ решения уравнения СРП представляют собой более короткие аналитические выражения. Последнее повышает быстродействие подпрограммы расчета массива времен землетрясений, что особенно важно в процессе оптимизации начальных условий с использованием метода рекуррентных сечений. Поэтому для $v_0=0$ в процессе интегрирования уравнения СРП можно выделить еще три случая:

1. При $v_0=0$ и $\gamma=1$ уравнение СРП имеет решение:

$$v = v_1 e^{k(x-x_0)} \quad \text{и} \quad t = t_0 - \frac{1}{kv} ,$$

где $t_0 = t_1 + \frac{1}{kv_1}$ ($v_1 = v(t_1)$; $x_1 = x(t_1)$).

2. При $v_0=0$ и $\gamma=0,5$ уравнение СРП имеет решение:

$$t = t_1 + \frac{1}{k} \ln \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} ,$$

где $x_0 = x_1 - \frac{v_1}{k_1}$.

3. При $v_0=0$ и $\gamma \neq 1$ и $\gamma=0,5$ уравнение СРП имеет решение:

$$v = \left[2k(1-\gamma)(x-x_0) \right]^{-\frac{1}{2(1-\gamma)}} \quad \text{и} \quad t = t_0 + \frac{v^{1-2\gamma}}{k(1-2\gamma)} ,$$

где $x_0 = x_1 - \frac{v^{2(1-\gamma)}}{k(1-\gamma)}$, $t_0 = t_1 - \frac{v^{1-2\gamma}}{k(1-2\gamma)}$.

Тем самым мы максимально упростили процедуру интегрирования уравнения СРП, а следовательно и поиска оптимальных начальных условий. Подобным образом можно завершить третий этап построения математической модели произвольной форшоковой последовательности сильного землетрясения.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

В разделе 1 был приведен пример поэтапного построения

математической модели афтершоковой последовательности толчков камчатского землетрясения 23.01.1980 г. в 01 час 51 мин (энергетический класс события по шкале С.А.Федотова равен 13,8). Аналогичные расчеты с помощью программы "CHAST" были выполнены также для 5 афтершоковых и одной форшоковой последовательностей южно-курильских землетрясений с $K \geq 9,0$ (по шкале Соловьевых С.Л. и О.Н.), происшедших в пределах двух площадок: 1- $\varphi = 42,0 - 44,0$ град. с.ш., $\lambda = 144,5 - 148,0$ град. в.д.; 2- $\varphi = 43,3 - 45,0$ град. с.ш., $\lambda = 148,0 - 150,2$ град. в.д.

В табл.2.1 содержатся данные об исходных обработанных последовательностях и результаты оценки оптимальных параметров дифференциального уравнения 1.3, причем в двух вариантах: фактически полученные с дробной степенью λ с точностью 10% (верхняя строка) и пересчитанные для целой степени λ (нижняя строка).

Из табл.2.1 видно, что в большинстве случаев, когда $v_0 \neq 0$ и соответственно степень λ имеет смысл, оптимальное ее значение близко к двум, что подтверждает правомерность применимость уравнения СРП к описанию форшок-афтершоковых последовательностей. Значение $v_0 = 0$ для второй и последней выборок свидетельствует об отсутствии на графике $N = N(t)$ наклонной асимптоты, т.е. землетрясения с $K \geq K_{\min} = 9,0$ происходят на площадке достаточно редко и она в асимптотике по времени на этом энергетическом уровне как бы асейсмична.

На рис. 2.1-2.2 демонстрируются закономерности изменения сейсмической активности в выборках из табл.2.1, аналогичные представленным ранее для камчатского землетрясения 23.01.1980 г.

Обработка только одной форшоковой последовательности с помощью программы "CHAST" объясняется следующими причинами:

- как правило, малым объемом форшоковых выборок и разбросом данных в отдельной выборке;
- недостаточным объемом данных машинного каталога, который следует в дальнейшем расширить. В рамках установленного вида дифференциального уравнения этот недостаток не будет играть роли и будет устранен в другой программе аппроксимации экспериментальных данных, оперирующей с конкретным уравнением.

Представляет интерес устойчивость параметра γ , который для обоих типов последовательностей был близок к единице. Наибольшую изменчивость имели параметры k и v_0 . При этом значение параметра k существенно зависит от уровня представительности выборки по энергетическому классу сейсмических событий, а v_0 - от размеров рассматриваемой площадки. Оценка оптимальных размеров площадки в

Данные об обработанных последовательностях и параметрах их математических моделей, рассчитанных на ПЭВМ

Таблица 2.1.

п/п	Начало и конец выборки дата, час, мин	Маг- туда тол- чка	Кол- во соб- тий	Сте- пень раз- реже- ния	Но- мер пло- щад- ки	Оптимальные параметры дифференциального уравнения					
						λ	k	γ	v_0	δ_l/δ	
1	5.04.1973	22-16	5,9	64	1	1	1,8	-0,165	0,940	0,338	1,91
	16.06.1973	01-36					2,0	-0,160	0,995	0,344	1,91
2	17.06.1973	03-55	8,0	560	5	1	-	-0,008	1,175	0,0	1,0
	13.05.1975	10-31									
3	24.02.1980	00-37	7,1	182	2	1	1,1	-0,068	0,944	0,195	8,17
	4.04.1981	16-50					2,0	-0,046	1,018	0,214	5,69
4	3.09.1981	05-35	6,7	66	1	1	2,2	-0,109	0,977	0,260	2,30
	23.11.1981	10-17					2,0	-0,112	0,973	0,258	2,30
5	24.03.1978	19-47	8,0	650	5	2	2,0	-0,016	1,022	0,377	6,19
	1.05.1980	10-18					2,0	-0,016	1,022	0,377	6,19
6	29.04.1977	09-41	7,5	79	1	2	-	-0,033	1,016	0,0	1,0
	12.02.1978	23-46									

Примечание. Выборки 1-5 являются афершоковыми, а 6 - форшоковой.

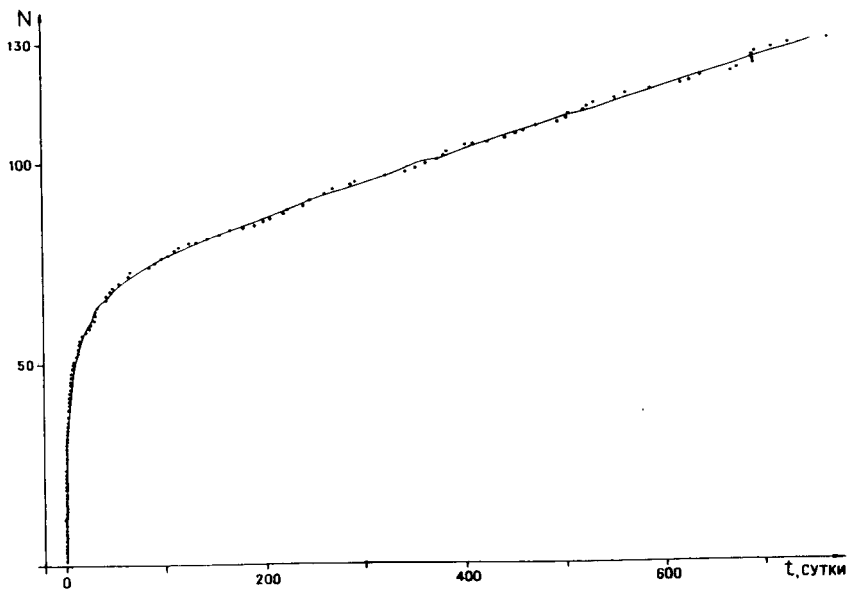


Рис. 2.1а. Сглаживание пятой афтершоковой последовательности из табл. 2.1 с параметром $J = 15$ событиями (с учетом разрежения выборки в 5 раз).

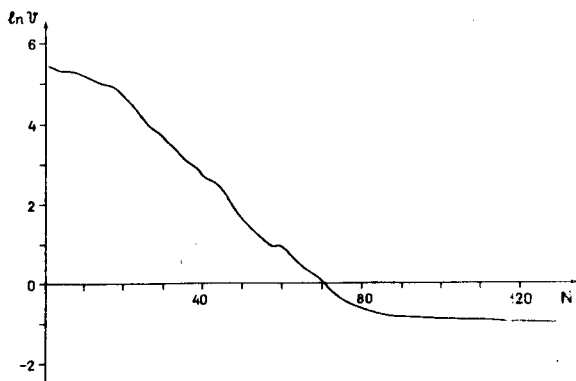


Рис. 2.16. Зависимость логарифма частоты сейсмических событий (ν) от порядковых номеров для последовательности, изображенной на рис. 2.1а. Номера N взяты с 5-кратным разрежением.

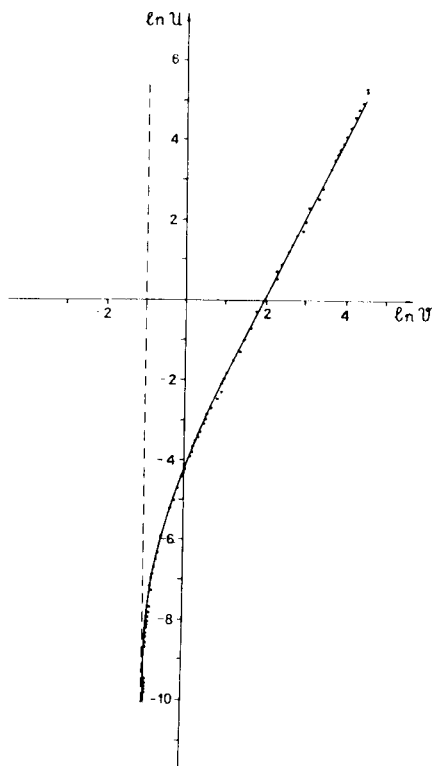


Рис. 2.1в. Взаимосвязь первой (v) и второй (u) производных изменения количества землетрясений с течением времени для последовательности, изображенной на рис. 2.1а. Пунктирная прямая – вертикальная асимптота. Здесь и далее (на рис. 2.2в) точками отмечены характерные значения параметров для иллюстрации степени разброса отдельных значений относительно осредняющей кривой. Отсутствие точек означает практическое их совпадение с данной кривой.

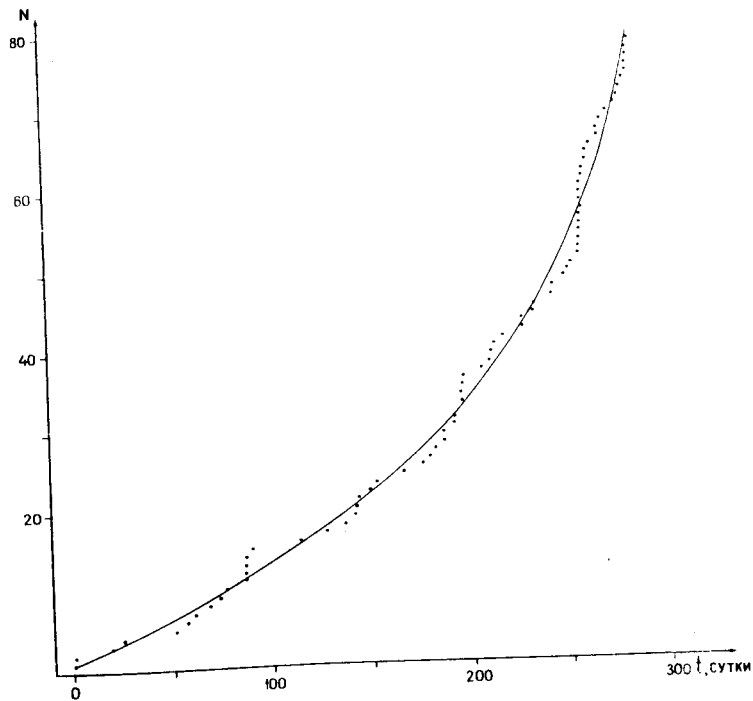


Рис. 2.2а. Сглаживание форшковой последовательности из табл. 2.1 с параметром $J = 39$ события.

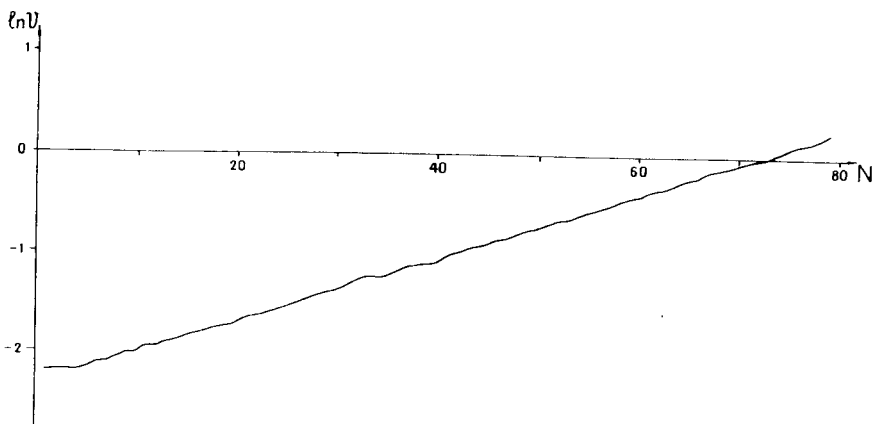


Рис. 2.2 б. Зависимость логарифма частоты сейсмических событий (v) от порядковых номеров для последовательности, изображенной на рис. 2.2 а.

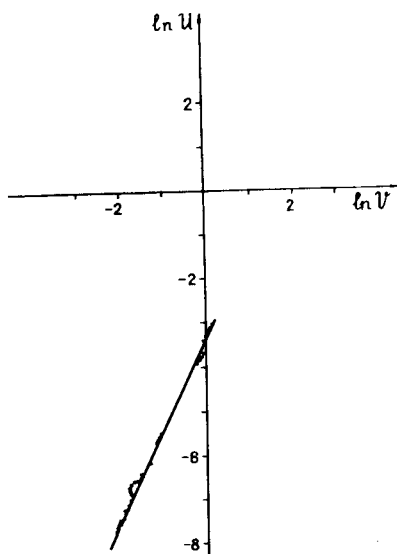


Рис.2.2 в. Взаимосвязь первой (v) и второй (u) производных изменения количества землетрясений с течением времени для последовательности, изображенной на рис.2.2 а.

данной задаче имеет большее значение при изучении форшоковых последовательностей, поскольку определяет пространственный параметр проявления форшокового предвестника. Выбор их определяется компромиссом между требованием получения устойчивой оценки параметра v_0 (расширения площадки) и требованием максимального снижения искажений рассматриваемых последовательностей за счет шумов (локализация областей повышенной активности путем сужения площадки). Для событий с магнитудой главного толчка более 7 размеры площадок целесообразно выбирать в пределах от (2x2) град до (3x3) град. Уточнение данных рекомендаций будет сделано в дальнейшем после получения достаточного статистического материала. Что касается временного параметра проявления форшокового предвестника, то здесь наблюдались значительные вариации для разных последовательностей - от нескольких часов до нескольких лет, в зависимости от того, на каком фоновом уровне проявлялась активизация форшоков [11].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения данной работы были получены следующие результаты. Разработаны методика, алгоритм и программное обеспечение построения математических моделей форшок-афтершоковых последовательностей сильных землетрясений. Как показывают расчеты разработанный алгоритм позволяет достаточно эффективно выявлять закономерности развития форшоковых и афтершоковых последовательностей. Особо важное значение имеет тот факт, что вышесказанная методика выявления закономерностей форшок-афтершоковых последовательностей и построения математических моделей позволяет максимально устранить какой бы то ни было элемент гипотичности, так как в ней не используются ни какие исходные предположения о том, какие именно закономерности могут иметь место.

Для семи последовательностей сильных курильских землетрясений подтверждена правомерность применения уравнения саморазвивающихся процессов к описанию их динамики, выявлена устойчивость одного и изменчивость двух других параметров этого уравнения. Сделана предварительная оценка пространственных и временных параметров проявления форшоковой и афтершоковой сейсмичности в районе Южных Курильских островов.

На основании проведенных исследований представляется весьма вероятным, что использование разработанной методики позволит установить закон, по которому происходит развитие сейсмической активности во времени. После анализа большого количества последовательностей можно судить об общности их математических моделей, а также об устойчивости или изменчивости параметров этих моделей. Значение подобного закона позволило бы эффективно предсказывать разрушительные сейсмические события по развитию в пространстве и времени предваряющего их форшокового процесса.

С учетом сказанного в дальнейшем актуально выполнение следующих работ:

- сбора статистического материала и изучения общности математических моделей, степени изменчивости или устойчивости их параметров в пределах одной площадки;
- проведения подобных операций для нескольких площадок одного региона и сопоставления полученных результатов;
- сравнения результатов обработки данных разных сейсмогенных регионов;
- установления корреляционных связей между размерами оптимальных площадок и магнитудами основных толчков;
- привлечения в качестве параметра процесса накопленных условных деформаций и суммарной энергии землетрясений.

4. ЛИТЕРАТУРА

1. Omori F. On the aftershocks of earthquake// J.Coll.Sci.Imp. Univ. Tokyo, 7, 111-200, 1894.
2. Utsu T. Magnitude of earthquakes and occurrence of their aftershocks// Zisin 2, 10, 35-45, 1957 (in Japanese).
3. Kisslinger C., Hasegawa A. Seismotectonics of intermediate - depth earthquakes from properties of aftershock sequences// Tectonophysics, v.197, no 1, 1991, p.27-40.
4. Гупта Х.К., Растоги Б.К. Плотины и землетрясения// М.:Изд-во Мир, 1979. 252 С.
5. Voight B. A relation to describe rate-dependent material failure// Science. v.243, 1989, p.200-203.
6. Voight B. A method for prediction of volcanic eruption// Nature. v.332, 1988, p.125-130.
7. Voight B., Orkan N., Young K. Deformation and failure-time prediction in rock mechanics// Rock mechanics as quite for efficient utilization of natural resourses, Khair(ed), Balkema. Rotterdam. 1989. p.919-929.
8. Bufe Ch. G, Varnes D J. Time-to-failure analysis of seismicity preceding the 1989 Loma Prieta earthquake// U. S. Geological Survey open-file report 90-666 , U. S. Geological Survey, Golden, Colorado, 1990, 18 p.
9. Мальшев А.И. Динамика спонтанных процессов// Тез. докл. международного симпозиума "Геодезия-сейсмология: деформации и прогноз". Ереван, 1989. С.111-112.
10. Мальшев А.И. Динамика саморазвивающихся процессов// Вулканология и сейсмология, N 4, 1991, С.61-72.
11. Мальшев А.И., Тихонов И.Н. Закономерности динамики форшок-афтершоковых последовательностей землетрясений в районе Южных Курильских островов// ДАН СССР, 1991. Т.319, N1. С.134-137.
12. Соловьев С.Л., Соловьева О.Н. Соотношение между энергетическим классом и магнитудой курильских землетрясений// Изв. АН СССР. Физика Земли. 1967. N2. С.13-22.
13. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Введение.....	3
1. Общй подход к построению математических моделей развития форшок-афтершоковых последовательностей.....	5
1.1. Многомерная оптимизация методом рекуррентных сечений..	5
1.2. Первый этап построения математической модели.....	9
1.3. Второй этап построения математической модели.....	17
1.4. Третий этап построения математической модели.....	21
2. Результаты моделирования и их анализ.....	23
3. Заключение.....	33
4. Литература.....	34

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ ФОРШОК - АФТЕРШОКОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИЛЬНЫХ КУРИЛЬСКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ
(препринт)

Подписано в печать 30.04.83. Заказ 6994
Усл. печ. лист 2.2. Уч. изд. лист 2.0. Тираж
200 экз. Формат 60x84/16. Бумага газетная.
Печать офсетная. Офсетный цех. Цена 4 рубля.

Институт морской геологии и геофизики
Дальневосточное отделение РА

г. Южно-Сахалинск, ул. Науки